Soluzioni Tutorato di Statistica 1 del 25/03/2010
Docente: Prof.ssa Enza Orlandi
Tutore: Dott.ssa Barbara De Cicco

Esercizio 1.
Sia $X \sim F(m,n)$, mostrare che $\frac{1}{X} \sim F(n,m)$. Sia $Y = \frac{1}{X}$ $F_Y(y) = P(\frac{1}{X} \le y) = P(X \ge y) = 1 - P(X \le y) = 1 - F_X(\frac{1}{y})$
$f_Y(y) = f_X(\frac{1}{y})\frac{1}{y^2} = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n})^{m/2}\frac{(\frac{1}{y})^{(m-2)/2}\frac{1}{y^2}}{(1+\frac{m}{ny})^{(m+n)/2}}1_{(0,+\infty)}(y) =$
$= \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{m}{n}^{m/2})\frac{(\frac{1}{y})^{(m+2)/2}}{(\frac{n}{m}y+1)^{(m+n)/2}(\frac{m}{n}y)^{(m+n)/2}}1_{(0,+\infty)}(y) =$
$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{n}{m})^{n/2}(\frac{1}{y})^{(-n+2)/2}\frac{1}{(\frac{n}{m}y+1)^{(m+n)/2}}1_{(0,+\infty)}(y) =$
$\frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}(\frac{n}{m})^{n/2}\frac{y^{(n-2)/2}}{(1+\frac{n}{m}y)^{(m+n)/2}}1_{(0,+\infty)}(y)$
Quindi $Y \sim F(n,m)$

Esercizio 2.
$X_1, ..., X_n$ un campione casuale da $f_X(x) = \frac{4x^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\theta^2}$ con $\theta, x > 0$.
Metodo dei momenti:
$E[X] = \int_o^{+\infty} \frac{4x^3}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-x^2/\theta^2}dx = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}$
$E[X] = \frac{2\theta}{\sqrt{\pi}}$ da cui imponendo l'equazione $\mu_1^{'} = M_1^{'}$ si ottiene $\hat{\theta} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\bar{X}$
Metodo della massima verosomiglianza:
$L(\theta, x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{4x_i^2}{\theta^3\sqrt{\pi}}e^{-x_i^2/\theta^2} = (\frac{4}{\theta^3\sqrt{\pi}})^n e^{-\sum_{i=1}^n x_i^2/\theta^2}\prod_{i=1}^n x_i^2$
Passando al logaritmo:
$logL(\theta, x_i) = nlog(\frac{4}{\theta^3\sqrt{\pi}}) - \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n logx_i^2$
$\frac{d}{d\theta}logL(\theta, x_i) = -\frac{3n}{\theta} + \frac{2}{\theta^3}\sum_{i+1}^n x_i^2 = 0$
Risolvendo si ottiene $\hat{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}\bar{X}}$

Esercizio 3.
X v.c. con densità $f_X(x) = \frac{\theta}{x^2}1_{(\theta,+\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
$f_X(x)$ è una densità poichè si verifica che: $\int_\theta^{+\infty}\frac{\theta}{x^2}dx = 1$
$L(\theta, x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^2}1_{[\theta,+\infty)}(x_i)$
$logL(\theta, x_i) = \sum_{i=1}^n log\theta - \sum_{i=1}^n logx_i^2 = nlog\theta - \sum_{i=1}^n logx_i^2$
$\frac{d}{d\theta}logL(\theta, x_i) = \frac{n}{\theta} = 0$
Non essendoci uno stimatore di θ la funzione di massima verosomiglianza raggiunge quindi il massimo in $x = min\{x_1, ..., x_n\}$

Esercizio 4.
$X_1, ..., X_n$ un campione casuale da $f_X(x) = \theta x^{\theta-1}1_{(0,1)}(x)$, $\theta > 0$.
$L(\theta, x_i) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1}1_{(0,1)}(\theta)$
$logL(\theta, x_i) = \sum_{i=1}^n log(\theta x_i^{\theta-1}) = nlog\theta + \sum_{i=1}^n(\theta-1)logx_i$
$\frac{d}{d\theta}logL(\theta, x_i) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n logx_i = 0$
quindi $\hat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n logx_i}$e $\hat{\mu} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n logx_i - n}$

Esercizio 5.
$X_1, ..., X_n$ c.c. da $f(x, \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)}1_{(0,+\infty)}(x)$, $\theta > 0$.
Metodo dei momenti:
Si osservi che il momento primo esiste solo se $\theta > 1$ poichè la funzione non è

integrabile. Quindi l'integrale esiste sse $\theta > 1$ e quindi:
$E[X] = \int_0^{+\infty} \theta x(1+x)^{-1-\theta} = \frac{1}{\theta-1}$, $\theta > 1$
Risolvendo $\mu_1^{'} = M_1^{'}$ si ottiene $\hat{\theta} = \frac{\bar{X}+1}{\bar{X}}$
Metodo della massima verosomiglianza:
$L(\theta, x_i) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1+x_i)^{-1-\theta} 1_{(0,+\infty)}(x_i)$
$logL(\theta, x_i) = nlog\theta + \sum_{i=1}^{n}(-1-\theta)log(1+x_i)$
$\frac{d}{d\theta} logL(\theta, x_i) = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} log(1+x_i) = 0$
dunque $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} log(1+x_i)}$ e $\frac{1}{\hat{\theta}} = (\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} log(1+x_i)})^{-1}$